

Satz 10.1 : (Grenzwerte monotoner Fkten) -338-

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten

$$-\infty \leq a < b \leq \infty. \quad f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

sei monoton wachsend.

a) An jeder inneren Stelle $y \in (a, b)$ existieren die einseitigen Limiten $f(y_{\pm})$ und erfüllen (in $\mathbb{R}$)

$$f(y-) = \lim_{x \uparrow y} f(x) = \sup \{ f(x) : x < y \} \leq$$

$$f(y) \leq \inf \{ f(x) : x > y \} = \lim_{x \downarrow y} f(x) = f(y+)$$

b) In den Randpunkten existieren die Grenzwerte eigentlich oder uneigentlich mit

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \inf \{ f(x) : x > a \},$$

$$\lim_{x \uparrow b} f(x) = \sup \{ f(x) : x < b \}.$$

c) analoge Aussagen für monoton fallende f
(betrachte $-f$!)

Beweis: a) Sei $y \in (a, b)$ fixiert $\Rightarrow$

$$c := \sup \{ f(x) : x < y \} \leq f(y) < \infty$$

(Monotonie)

Def. von $\sup \Rightarrow$ zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein
 $x_0 < y$ mit

$$c - \varepsilon \leq f(x_0);$$

$$f \text{ w\"achst} \Rightarrow c - \varepsilon \leq f(x) \quad \forall x \in (x_0, y)$$

für diese x gilt offenbar: $f(x) \leq c$

Zusammen:

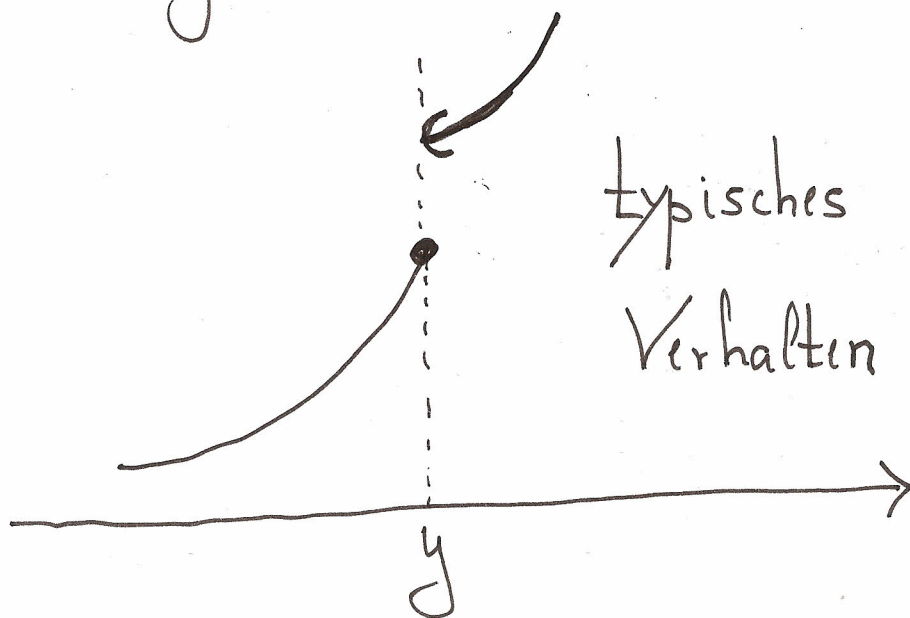
$$|f(x) - c| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, y)$$

D.h.: $\lim_{x \uparrow y} f(x) = c.$

Alle anderen Aussagen : analog !



Ist also f monoton, so kann f im Inneren nur Sprungstellen y haben (, denn die einseitigen Limiten existieren ja !)



Davon gibt es aber nicht sehr viele:

-341-

Satz 10.2 : Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall

und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann hat f

höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen,

und diese sind Sprungstellen.

Idee (Details als Übungsaufgabe) :

1^{te} Beobachtung: jedes Intervall I lässt sich schreiben als höchstens abzählbare Vereinigung von kompakten Intervallen I_n .

Zeige also die Beh. für I_n statt I und

benutze: höchstens abzählbare Vereinigungen

von höchstens abzählbaren Mengen haben auch diese Kategorie.

Sei also $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wachsend.

2^{te} Beobachtung:

$$\{x \in [a, b] : x \text{ Sprungstelle}\} = \overline{\mathbb{Q}}$$

$$\{x \in (a, b) : f(x+) > f(x-)\} =$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in (a, b) : f(x+) - f(x-) \geq \frac{1}{m}\}$$

nun prüfe:

die Anzahl der Elemente in $\downarrow$ ist

$$\leq m \cdot (f(b) - f(a)) < \infty$$



Die nächste wichtige Klassen besteht aus
Differenzen von monotonen Funktionen:

Def. 10.2 : (BV-Funktionen)

-343-

Sei $[a, b] \subset D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

f heißt von beschränkter Variation auf $[a, b]$, falls

$$V_a^b(f) < \infty,$$

$$V_a^b(f) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : \right.$$

$$\left. a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(sup über alle Zerlegungen!)

Bem: ① die BV-Funktionen auf $[a, b]$ bilden einen reellen Vektorraum

$$\textcircled{2} \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ monoton} \implies f \text{ BV}$$

$$\text{denn: } V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$$

D.h.: $f \text{ BV} \not\stackrel{\text{i.a.}}{\Rightarrow} f \text{ stetig}$

-344-

(nehme ein monotonen f mit Sprungstellen)

aber:

③ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz $\Rightarrow f \text{ BV}$

denn: $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq$

$$L \cdot \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| = L \cdot (b-a).$$

④ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\not\stackrel{\text{i.a.}}{\Rightarrow} f \text{ BV}$

$$f: [0, \frac{1}{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0, & x=0 \\ x \cdot \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

Zerlegung: $x_0 = 0$, $x_k := \frac{1}{(2m+1-k) \frac{1}{\pi}}$,

$$k = 1, \dots, 2m$$

$$\Rightarrow V_0^{1/\pi}(f) = \infty.$$

Satz 10.3 : Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann gilt:

f ist BV auf $[a, b] \iff$
 $f = g - h$ mit monoton wachsenden
 Funktionen $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Beweis: " $\Leftarrow$ " klar! (vgl. ① u. ②)

" $\Rightarrow$ ": betrachte die Funktion

$$g(x) := V_a^x(f), \quad x \in [a, b]$$

dann gilt:

$$\forall a \leq x < y \leq b: \quad g(y) - g(x) \geq |f(y) - f(x)|$$



⊛ $\Rightarrow$ g monoton wachsend;

setze

$$h(x) := g(x) - f(x)$$

h wächst, denn für $y > x$ gilt:

$$h(y) - h(x) = g(y) - f(y) - g(x) + f(x)$$

$$= g(y) - g(x) + f(x) - f(y)$$

$$\geq |f(y) - f(x)| - (f(y) - f(x)) \geq 0$$

⊛

ad ⊛: betrachte beliebige Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = x$$

von $[a, x] \Rightarrow$

$$a = t_0 < \dots < t_n < t_{n+1} := y$$

ist eine Zerlegung von $[a, y]$

-347-

also:

$$g(y) = V_a^y(f) \geq \sum_{k=1}^{n+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

$$= |f(y) - f(x)| + \underbrace{\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|}_{\text{Kann beliebig nahe an } V_a^x(f) \text{ gew\u00e4hlt werden}}$$

$$\Rightarrow g(y) \geq |f(y) - f(x)| + g(x).$$



Korollar : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ BV-Fkt.

$\Rightarrow f$ hat nur abz\u00e4hlbar viele

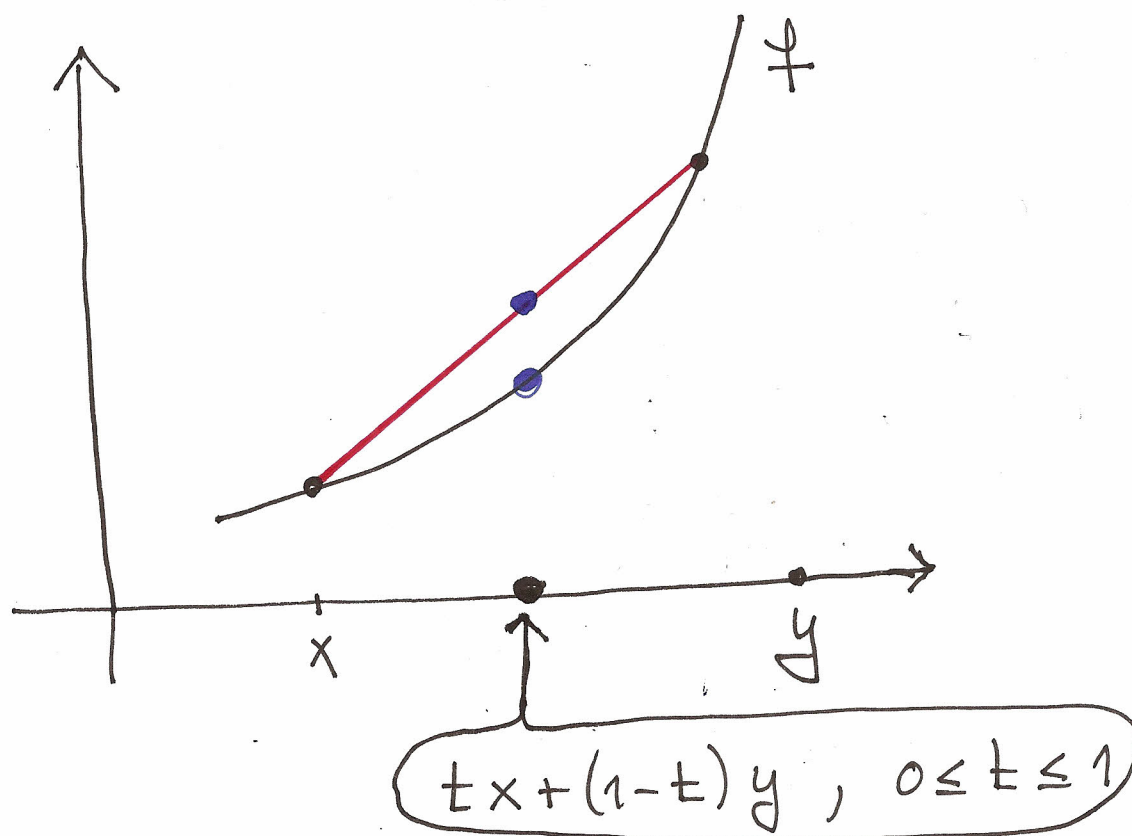
Unstetigkeitsstellen, und diese sind

Sprungstellen

Konvexe Funktionen

-348-

($\hat{=}$ "die Funktion liegt unterhalb der Sekanten")



Def 10.3: Sei $f: \text{Intervall } I \rightarrow \mathbb{R}$.

a) f konvex : $\iff$

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t)f(y)$$

$$\forall x, y \in I, 0 \leq t \leq 1$$

b) f streng konvex : $\iff$

..... mit " $=$ " nur für $t \in \{0, 1\}$ oder $x = y$

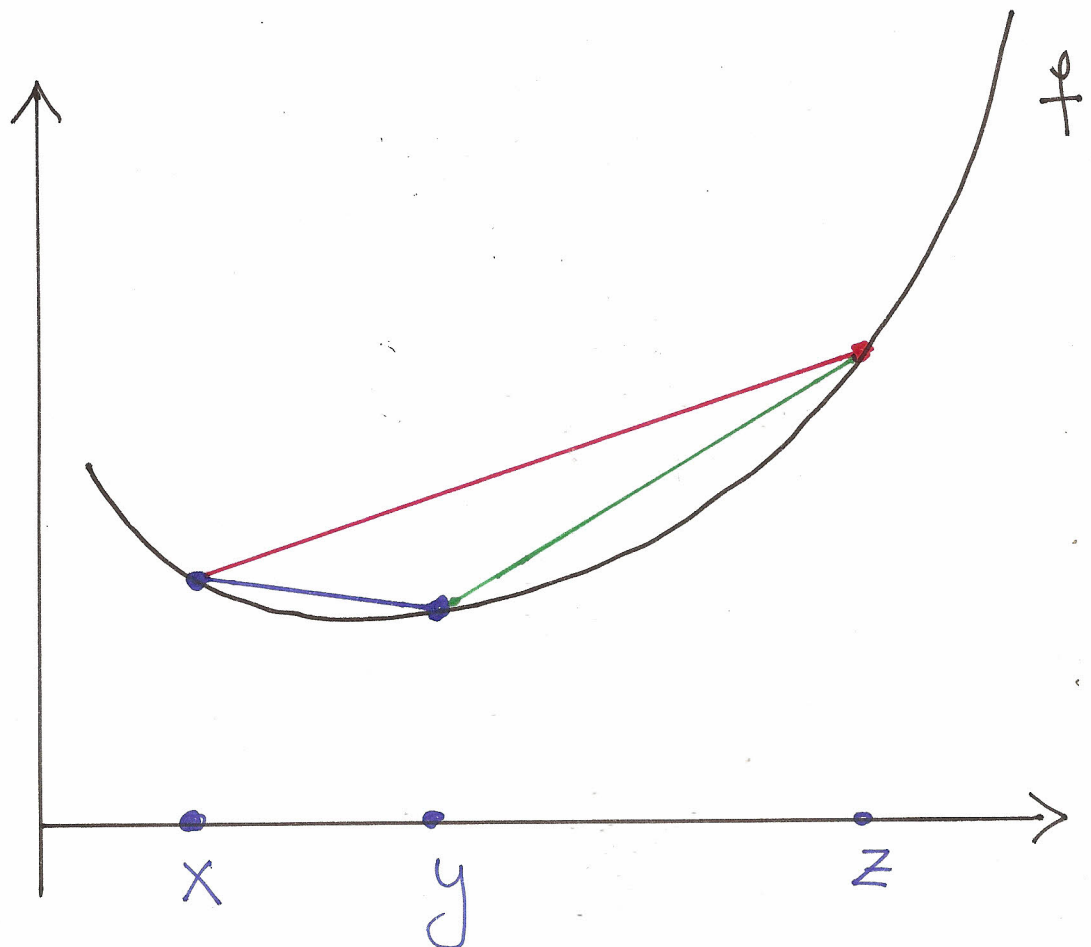
c) $\nexists$ (streng) konkav : $\iff$
 $\neg$ (streng) konvex

Beispiele : 1.) $x \mapsto e^x$ streng konvex auf $\mathbb{R}$,

ebenso $x \mapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$

2.) $\log$ streng konkav auf $(0, \infty)$

$\leadsto$ Beweise mit Differentialrechnung! ∇



Steigung „blau“ $\leq$ Steigung „rot“ $\leq$ Steigung „grün“

" f konvex $\Leftrightarrow$ Sekantensteigung
wachsend "

-350-

genauer:

Satz 10.4 : $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (streng) konvex

$$\Leftrightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \begin{matrix} (<) \\ (<) \end{matrix}$$

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

$$\boxed{\forall x < y < z \text{ aus } I}$$

Beweis (Übungsaufgabe!)

Hinweis zu " $\Leftarrow$ ": gegeben $u < v$ aus

I sowie $0 < t < 1$; setze

$$w := tu + (1-t)v$$

und benutze die 1^{te} Ungleichung mit

$$x := u, \quad y := w, \quad z := v$$

$$\Rightarrow f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v). \quad \square$$

Satz 10.5 :

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Konvex (Konkav)
 $\implies f$ stetig auf I

Beweis: Sei $x \in I$ kein Randpunkt.

Satz 10.4 $\implies$

$$\gamma: I - \{x\} \ni y \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

wächst monoton $\implies \gamma(x \pm)$ existieren

speziell:

$$\lim_{y \uparrow x} (f(y) - f(x)) = \lim_{y \uparrow x} \{ \gamma(y) \cdot (y - x) \} =$$

$$\gamma(x-) \cdot \lim_{y \uparrow x} (y - x) = 0 \quad \text{und genauso}$$

$$\lim_{y \downarrow x} (f(y) - f(x)) = \dots = 0.$$

Also $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$, d.h. f stetig in x

□

§ 11 Differenzierbare Funktionen

-352-

Def 11.1: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall,
 $x_0 \in I$ ein innerer Punkt. $f: I \rightarrow \mathbb{C}$
heißt differenzierbar in x_0 , falls

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f^{(1)}(x_0) := \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} :=$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Differenzenquotient von } f \text{ bei } x_0} \text{ in } \mathbb{C} \text{ existiert.}$$

Differenzenquotient von f bei x_0
(ist auf $I - \{x_0\}$ definiert)

Bem: Offenbar gilt

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

falls existiert.

Beispiele: ① $\varphi(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$ -353-

es gilt: $\varphi'(a) = n a^{n-1} \quad \forall a \in \mathbb{R}$,

denn: $\frac{1}{x-a} (x^n - a^n) =$

$$x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \dots + a^{n-2} x + a^{n-1},$$

und jeder der n Summanden konvergiert gegen a^{n-1} bei $x \rightarrow a$.

② $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

Satz 8.5, (2) $\implies 1 - \frac{1}{h} \leq \ln h \leq h - 1$
 $\forall h > 0$

Sei $x_0 > 0$ fixiert. Für $x > 0$ folgt mit

$$h := x/x_0 :$$

$$\frac{1}{x-x_0} (\ln x - \ln x_0) = \frac{1}{x-x_0} \ln h$$

$$\leq \frac{1}{x-x_0} (h-1) \quad \leftarrow \text{falls } x > x_0 = \frac{1}{x-x_0} \frac{x-x_0}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

und

$$\frac{1}{x-x_0} (\ln x - \ln x_0) \geq \frac{1}{x-x_0} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \quad \leftarrow \text{falls } x_0 < x =$$

$$\frac{1}{x-x_0} \frac{x-x_0}{x} = \frac{1}{x} \longrightarrow \frac{1}{x_0} \text{ bei } x \rightarrow x_0$$

(für $x < x_0$: analog!)

$$\textcircled{3} \quad \boxed{\frac{d}{dx} e^{cx} = c \cdot e^{cx}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \underline{c \in \mathbb{C}}$$

Wir wissen $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} (e^y - 1) = 1$. ⊛

Mit $f(x) := e^{cx}$ gilt bei festem x

$$\frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h} [e^{cx+ch} - e^{cx}] =$$

$$e^{cx} \frac{1}{h} [e^{ch} - 1] =$$

$$c e^{cx} \frac{1}{ch} [e^{ch} - 1] \xrightarrow{h \rightarrow 0} c e^{cx}$$

Bem: Die Gültigkeit von $(*)$ bei komplexem

Grenzübergang steht in Satz 8.7 (c).

(benutze die Reihenentwicklung für e^z !)

Spezialfälle: a) $c = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$

b) $c = i \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} cis = i cis}$

c)

$$\frac{d}{dx} \sin = \cos, \quad \frac{d}{dx} \cos = -\sin$$

folgt aus b) und der Tatsache

$$\left\{ \begin{array}{l} f: I \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{C}}} \text{ diff'bar in } x_0 \implies \\ \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f: I \rightarrow \mathbb{R} \quad -||- \quad \text{mit} \\ \left. \frac{d}{dx} \operatorname{Re} f \right|_{x_0} = \operatorname{Re}(f'(x_0)), \dots \end{array} \right\}$$

④ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := |x|$, nicht diff'bar in 0:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \text{ hat } \underline{\text{Keinen}}$$

Limes bei $x \rightarrow 0$,

aber: f stetig in 0!

Satz 11.1

: f diff'bar in $x_0 \implies$
 f stetig in x_0

Beweis: Sei $\gamma := f'(x_0)$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt
 es ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \gamma \right| \leq 1$$

für alle $0 < |x - x_0| < \delta$. Dann ist

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (1 + |\gamma|) |x - x_0|$$

für diese x , also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



"Differenzierbarkeit" bedeutet "gute lineare

Approximierbarkeit", genauer:

Satz 11.2 : $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ ist diff'bar in $x_0 \in I$

$\iff$ $\exists$ eine affin lineare Funktion

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, also

$$F(x) = a(x - x_0) + b \text{ mit } a, b \in \mathbb{C},$$

so dass für den „Rest“

$$R(x) := f(x) - F(x)$$

gilt : $R(x_0) = 0$ und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0 \quad (*)$$

Beweis : „ $\implies$ “ : Setze

$$F(x) := f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0);$$

dann ist

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0),$$

und $(*)$ somit klar.

-359-

$\Leftarrow$: Mit $T(x) = a(x-x_0) + b$

folgt aus $R(x_0) = 0$ sofort $b = f(x_0)$

Das ergibt:

$$0 \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a(x-x_0) - f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - a \right\}$$

Nach Def. 11.1 ist f diff'bar in x_0 mit $f'(x_0) = a$

□

Def. 11.2: (einsitige Ableitungen)

Sei $[a, b] \subset \text{Def}(f)$. Man setzt

$$f'_+(x) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)), \quad a \leq x < b$$

$$f'_-(x) := \lim_{h \uparrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)), \quad a < x \leq b$$